JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY 32, 189–210 (1981)

Verallgemeinerte Fourier-Entwicklungen ohne Gibbs'sches Phänomen am Rand

C. SCHRÖCK-PAULI

Institut für Festkörperforschung, Kernforschungsanlage Jülich, 5170 Jülich, West Germany

Communicated by P. L. Butzer

Received March 7, 1980

1. EINLEITUNG

Betrachten wir bei beliebig vorgegebenem $\omega > 0$ auf dem Intervall $[0, \omega]$ die Fourier-Entwicklung einer Funktion g von beschränkter Variation, $g \in BV[0, \omega]$, so ist bekannt, daß die Fourier-Reihe in Unstetigkeitsstellen $\tilde{x} \in [0, \omega]$ 1. Art von g gegen den Mittelwert $(g(\tilde{x}+0) + g(\tilde{x}-0))/2$ der rechts- und linksseitigen Grenzwerte von g in $\tilde{x}$ konvergiert, wobei die Folge der Fourier-Partialsummen in allen Umgebungen von $\tilde{x}$ das sogenannte *Gibbs'sche Phänomen* aufweist: Die n-ten Fourier-Partialsummen von g besitzen nämlich in der Nähe von $\tilde{x}$ Maxima und Minima, deren Grenzwerte für $n \to \infty$ aus dem Intervall $[g(\tilde{x}-0), g(\tilde{x}+0)]$ heraustreten. Diese von Wilbraham [9] bemerkte Erscheinung ist Ende des 19. Jahrhunderts von Gibbs [4] wiederentdeckt und später nach ihm benannt worden. Der Gibbs-Effekt tritt—bei periodischer Fortsetzung von g außerhalb von $[0, \omega]$ auf ganz $\mathbf{R}$—insbesondere auch in den *Randpunkten* $x = 0$ und $x = \omega$ auf, sofern dort nicht die Randwerte $g(0)$ und $g(\omega)$ übereinstimmen.

Eine Möglichkeit, diese unangenehmen Randeffekte zu umgehen, besteht in einer geeigneten Koordinatentransformation, nach der die zu entwickelnde, transformierte Funktion automatisch gleiche Randwerte besitzt. Man kann auch die Lanczos-Darstellung der zu entwickelnden Funktion g wählen, bei der g in ein Polynom und eine Restfunktion mit rasch zu Null konvergierenden Fourier-Koeffizienten zerlegt wird (s. [5]). Wie wir im folgenden zeigen werden, ist es aber auch möglich, eine geeignete Modifikation des Fourier'schen Funktionensystems und der zugehörigen Entwicklung vorzunehmen, die zu einer biorthogonalen Exponentialentwicklung, der sogenannten *Kanonischen Exponential-Entwicklung* (KE-Entwicklung), führt, welche für eine gewisse Klasse von Funktionen g am *Rand* des Entwicklungsintervalles *kein Gibbs-Phänomen* aufweist.

Zu dieser Verallgemeinerung der Fourier-Reihen führt die Beobachtung,

0021-9045/81/070189–22$02.00/0

daß die Exponenten des Fourier'schen Exponentialsystems (bzgl. des Intervalles $[0, \omega]$) die Nullstellen der ganzen Funktion

$$f(z) = e^{\omega z} - 1, \qquad z \in \mathbf{C}, \tag{1.1}$$

vom exponentiellen Typ ω sind. Wir betrachten somit im folgenden in Erweiterung von (1.1) die ganze Funktion

$$f(z) = Q_n(z) e^{\omega z} + P_m(z), \qquad z \in \mathbf{C}, \tag{1.2}$$

in der Q_n bzw. P_m Polynome mit reellen Koeffizienten a_j, $0 \leqslant j \leqslant n$, bzw. b_j, $0 \leqslant j \leqslant m$, vom Grad n bzw. m bedeuten. Die KE-Entwicklung ist dann eine *Exponential-Entwicklung* nach den *Nullstellen* der ganzen Funktion f in (1.2), die auch als Entwicklung nach Grundlösungen der homogenen linearen Differenzen-Differentialgleichung

$$(Lu)(x) := \sum_{j=0}^{n} a_j u^{(j)}(x) + \sum_{j=0}^{m} b_j u^{(j)}(x - \omega) = 0 \tag{1.3}$$

aufgefaßt werden kann. Die Koeffizientenfunktionale der KE-Entwicklung sind speziell so gewählt, daß sie ein ***Biorthogonalsystem*** zu dem entsprechenden Exponentialsystem, nach dem entwickelt wird, bilden und eine stückweise differenzierbare Funktion von beschränkter Variation außerhalb des Entwicklungsintervalles $[0, \omega]$ stetig fortgesetzt wird als Lösung eines gewissen Anfangswertproblems zur Differenzen-Differentialgleichung (1.3) (vgl. dazu [6]). Im Spezialfall (1.1) stimmt die KE-Entwicklung mit der Fourier-Entwicklung überein, wobei (1.3) dann zu einer reinen Differenzengleichung entartet, die die Periodizität der entwickelten Funktion beschreibt.

Die KE-Entwicklung ist im *Innern* des Entwicklungsintervalles $[0, \omega]$ der Fourier-Entwicklung sehr verwandt, wie wir im Vergleichssatz 1 über die beschränkte und kompakte Äquikonvergenz zwischen beiden Entwicklungsarten zeigen werden. Dabei wird der Konvergenzbeweis erst durch eine spezielle *Zerlegung* der KE-Entwicklungskoeffizienten erreicht, die gleichzeitig zu einem neuen Zugang zur KE-Entwicklung über eine sogenannte *Cauchy-Exponential-Entwicklung* verhilft, losgelöst von ihrer Herkunft aus der Theorie der Differenzen-Differentialgleichungen. Darüber hinaus gestattet unsere Beweismethode die Verallgemeinerung bekannter Konvergenzergebnisse für die KE-Entwicklung, wie sie innerhalb des Differenzen-Differentialgleichungskalküls in [2, 7, 10] gegeben werden.

Über das *Randverhalten* der KE-Entwicklung einer Funktion g zeigen wir in Satz 2, daß *gleichmäßige Konvergenz* in einer linksseitigen Umgebung von $x = \omega$ und im Fall $m = n$ auch in einer rechtsseitigen Umgebung von $x = 0$ gegen die *tatsächlichen Funktionswerte* $g(\omega)$ bzw. $g(0)$ vorliegt, sofern g eine stückweise differenzierbare Funktion von beschränkter Variation ist.

2. Definition des verallgemeinerten Fourier-Systems

Im folgenden seien Polynome $Q_n, P_m \in \mathbf{R}[z]$ der Form

$$Q_n(z) := \sum_{j=0}^{n} a_j z^j, \qquad z \in \mathbf{C}, \tag{2.1}$$

$$P_m(z) := \sum_{j=0}^{m} b_j z^j, \qquad z \in \mathbf{C}, \tag{2.2}$$

vorgegeben mit Koeffizienten

$$a_j, b_i \in \mathbf{R}, \qquad 0 \leqslant j \leqslant n, \quad 0 \leqslant i \leqslant m, \tag{2.3}$$

und es sei o.B.d.A.

$$a_n > 0, \qquad b_m \neq 0, \qquad m \leqslant n. \tag{2.4}$$

Ferner setzen wir $n \neq 0$ voraus. Mit beliebig, aber festem $\omega \in \mathbf{R}^+ \backslash \{0\}$ wird dann durch (1.2) eine *ganze Funktion f des exponentiellen Typs ω* definiert. Derartige Funktionen sind ausführlich untersucht worden; eine umfangreiche Literaturliste ist in [6] angegeben, so daß wir uns hier auf die Aufzählung einiger wesentlicher Eigenschaften beschränken können:

f besitzt abzählbar unendlich viele *Nullstellen*, die sich im Endlichen nicht häufen können und die wir in der Menge S, wie folgt, zusammenfassen:

$$S = \{s_\nu \mid \nu \in \mathbf{Z}\}; \qquad |s_\nu| \leqslant |s_{\nu+1}|, \ \nu \in \mathbf{N};$$
$$s_{-\nu} = \bar{s}_\nu, \ \nu \in \mathbf{Z} \backslash \{0\}. \tag{2.5}$$

Dabei ist s_0 je nach Anzahl der *reellen* Nullstellen von f, von denen es höchstens $m+n+1$ geben kann, geeignet zu interpretieren. *Fast alle* Nullstellen von f sind *einfach*, und die maximale Vielfachheit $m+n+1$ kann höchstens einmal angenommen werden.

Für $m = n$ gilt *asymptotisch*

$$s_\nu = \frac{2\pi i}{\omega} \nu + c + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\nu|}\right) \qquad (|\nu| \to \infty), \tag{2.6}$$

und im Fall $m < n$

$$s_\nu = \frac{2\pi i}{\omega} \nu - \frac{q}{\omega} \log|\nu| + d + \mathcal{O}\left(\frac{\log|\nu|}{|\nu|}\right) \qquad (|\nu| \to \infty), \tag{2.7}$$

mit reellen Konstanten c, d und $q = n - m$.

Das verallgemeinerte Fourier-System, nach dem wir im folgenden Reihenentwicklungen studieren wollen, ist das *Exponentialsystem*

$$E[S] := \{e^{s_\nu \cdot} \mid \nu \in \mathbf{Z}\} \tag{2.8}$$

nach der Nullstellenmenge S in (2.5). Aufgrund der Asymptotik (2.6–2.7) ist $E[S]$ für $m = n$ interpretierbar als ein durch asymptotisch konstante, achsenparallele Verschiebung gestörtes Fourier-System, während es sich im Fall $m < n$ näherungsweise um ein gedämpftes, harmonisches Funktionensystem handelt.

3. Die Kanonische Exponential-Entwicklung

Wir führen eine Funktionenklasse G von meßbaren und summierbaren Funktionen auf $[0, \omega]$ mit speziellem regulären Randverhalten ein durch

$$G \equiv G(m; n; 0, \omega) := \{g \in L^1(0, \omega) \mid \exists \varepsilon \equiv \varepsilon(g) > 0: \\ g \in C^{m-1}[0, \varepsilon] \cap C^{n-1}[\omega - \varepsilon, \omega]\}, \tag{3.1}$$

wobei Ableitungen in Intervallrandpunkten als rechts- (falls $m \geqslant 1$ ist) bzw. linksseitige Grenzwerte zu verstehen sind. Dann heißt die unendliche Reihe

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_\nu e^{s_\nu x}, \qquad x \in [0, \omega], \tag{3.2}$$

mit den Gliedern

$$c_\nu e^{s_\nu x} := \operatorname*{Res}_{z = s_\nu} \left\{ \frac{Q_n(z) e^{\omega z}}{f(z)} \int_0^\omega g(t) e^{z(x-t)}\, dt + \frac{K(z) e^{zx}}{f(z)} \right\}, \\ \nu \in \mathbf{Z},\ x \in [0, \omega], \tag{3.3}$$

wobei

$$K(z) := \sum_{i=0}^{n-1} K_i z^i, \qquad z \in \mathbf{C}, \tag{3.4}$$

mit

$$K_i \equiv K_i(g) := \sum_{j=i+1}^{n} a_j g^{(j-i-1)}(\omega) + \sum_{j=i+1}^{m} b_j g^{(j-i-1)}(0), \\ 0 \leqslant i \leqslant n-1, \tag{3.5}$$

gesetzt ist, die *Kanonische Exponential-* (KE-) *Entwicklung von* $g \in G$

bezüglich f auf $[0, \omega]$. Die KE-Entwicklung kann als eine Modifikation der *Cauchy-Exponential-* (CE-) *Entwicklung*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_\nu e^{s_\nu x}, \qquad x \in [0, \omega], \tag{3.6}$$

bezüglich der von f abhängigen, nicht-rationalen *meromorphen* Funktion

$$M(z) = \frac{Q_n(z) e^{\omega z}}{f(z)}, \qquad z \in \mathbf{C}, \tag{3.7}$$

mit den Gliedern

$$\gamma_\nu e^{s_\nu x} := \operatorname*{Res}_{z = s_\nu} \left\{ M(z) \int_0^\omega g(t) e^{z(x-t)}\, dt \right\}, \qquad \nu \in \mathbf{Z},\ x \in [0, \omega], \tag{3.8}$$

verstanden werden (vgl. [6]), deren allgemeine Definition von Fejes [3] stammt. Für den Fall $m = n$ wurde die CE-Entwicklung bzgl. M in (3.7) von Anderson und Fullerton in [1] untersucht, und im Spezialfall $m = 0$, $n = 1$ gibt es darüber eine Arbeit von Verblunsky [8].

Für den Spezialfall (1.1) geht sowohl die CE-Entwicklung (3.6) als auch die KE-Entwicklung (3.2) (unter Berücksichtigung der üblichen Summenkonvention bei K) in die bekannte Fourier-Entwicklung (bzgl. $[0, \omega]$) über. Die KE-Entwicklung stellt aber—im Gegensatz zur CE-Entwicklung—eine *Biorthogonalentwicklung* dar (s. [6]) und erscheint daher als die natürliche Verallgemeinerung der Fourier-Entwicklung.

Für die KE- bzw. CE-Partialsummen werden wir im folgenden die Verwendung nicht-negativer Summationsindizes vorziehen, wobei die Nullstellen betragsmäßig angeordnet werden. Dazu führen wir *geschlossene Wege* C_ℓ, $\ell \in \mathbf{N}$, in der komplexen Ebene ein (vgl. [2, 7]), deren Existenz durch die Asymptotik (2.6–2.7) gesichert ist: C_ℓ, $\ell \in \mathbf{N}$, entstehe aus dem Kreis

$$K_\ell := \{ z \in \mathbf{C} \mid |z| = r_\ell \} \tag{3.9}$$

mit dem Radius

$$r_\ell := (2\ell + 1) \frac{\pi}{\omega} \tag{3.10}$$

durch leichte Modifikation mit Hilfe kleiner Kreisbögen derart, daß für ein $\delta_0 > 0$ und alle $s_\nu \in S$ die Beziehung

$$|z - s_\nu| \geqslant \delta_0 > 0, \qquad z \in C_\ell, \tag{3.11}$$

erfüllt ist. Für die Anzahl n_ℓ der Nullstellen von f innerhalb von C_ℓ gilt dann

$$|n_\ell - 2\ell| = \mathcal{O}(1) \qquad (\ell \to \infty), \tag{3.12}$$

und zwar liegen in C_ℓ genau diejenigen $s_\nu \in S$ mit $|\nu| \leqslant \ell$. Wegen (3.11) hat man nach Konstruktion die fundamentale Abschätzung

$$|f(z)| > K\{|z^n e^{\omega z}| + \kappa\, |z^m|\}, \qquad z \in C_\ell, \tag{3.13}$$

mit Konstanten K, $\kappa > 0$. Aus dem Residuenkalkül erhalten wir für die KE-*Partialsummen* die Darstellung

$$\begin{aligned} T_{n_\ell}(x) \equiv T_{n_\ell}(g; x) &:= \sum_{\nu=1}^{n_\ell} c_\nu e^{s_\nu x} \\ &= \sum_{|s_\nu| \leqslant r_\ell} c_\nu e^{s_\nu x} = \sum_{|\nu| \leqslant \ell} c_\nu e^{s_\nu x} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\ell} \left\{ M(z) \int_0^\omega g(t) e^{z(x-t)}\, dt + \frac{K(z) e^{zx}}{f(z)} \right\} dz, \end{aligned} \tag{3.14}$$

und entsprechendes gilt für die CE-Partialsummen. Später benutzen wir noch die *Zerlegung* $C_\ell = C_\ell^+ \cup C_\ell^-$, $\ell \in \mathbf{N}$, mit

$$C_\ell^+ := C_\ell \cap \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re} z \geqslant 0\}, \qquad C_\ell^- := C_\ell \cap \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re} z < 0\}. \tag{3.15}$$

4. Konvergenz im Innern des Entwicklungsintervalles

Von nun an wollen wir der Einfachheit halber voraussetzen, daß *alle* Nullstellen von f in (1.2) *einfach* sind. Da dies ohnehin für fast alle Elemente aus S in (2.5) zutrifft, können die folgenden Ergebnisse uneingeschränkt auf den allgemeinen Fall übertragen werden.

Wir erhalten dann für die (konstanten) KE-Entwicklungskoeffizienten einer Funktion $g \in G$ nach Definition (3.3) und (3.7–3.8) die *Zerlegung*

$$c_\nu = \gamma_\nu + r_\nu, \qquad \nu \in \mathbf{Z}, \tag{4.1}$$

mit den (ebenfalls konstanten) CE-Entwicklungskoeffizienten

$$\left.\begin{aligned} \gamma_\nu &= \lambda_\nu \int_0^\omega g(t) e^{-s_\nu t}\, dt, \\ \lambda_\nu &= \frac{Q_n(s_\nu) e^{\omega s_\nu}}{f'(s_\nu)} = -\frac{P_m(s_\nu)}{f'(s_\nu)}, \end{aligned}\right\} \quad \nu \in \mathbf{Z}, \tag{4.2}$$

und den Randtermen

$$r_\nu := \frac{1}{f'(s_\nu)} \sum_{i=0}^{n-1} K_i s_\nu^i, \qquad \nu \in \mathbf{Z}, \tag{4.3}$$

wobei die Konstanten K_i, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, in (3.5) erklärt sind. Um die Konvergenz der KE-Entwicklung (3.2) nachzuweisen, genügt es also, die entsprechenden Eigenschaften der CE-Entwicklung (3.6) und des Randanteils

$$\sum_{-\infty}^{\infty} r_\nu e^{s_\nu x}, \qquad x \in [0, \omega], \tag{4.4}$$

zu untersuchen, was in den folgenden beiden Lemmata geschieht. Dabei bezeichnen wir allgemein mit $s_\ell(\phi; x)$ die ℓ-te Fourier-Partialsumme einer Funktion $\phi \in L^1(0, \omega)$ im Punkt $x \in [0, \omega]$. Außerdem setzen wir für $m = n$

$$\rho := \frac{1}{\omega} H.W. \log \left(- \lim_{|z| \to \infty} \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} \right) = \frac{1}{\omega} H.W. \log \left(- \frac{b_n}{a_n} \right), \tag{4.5}$$

wodurch die Verschiebung von S gegenüber der Menge der Fourier-Exponenten charakterisiert wird.

Lemma 1. (1) *Ist $m = n$ und $g \in L^1(0, \omega)$, so konvergiert*

$$\sum_{\nu=1}^{n_\ell} \gamma_\nu e^{s_\nu x} - e^{\rho x} s_\ell(g e^{-\rho \cdot}; x) \to 0 \qquad (\ell \to \infty)$$

gleichmäßig für alle $x \in [0, \omega]$.

(2a) *Ist $m = n-1$ und $g \in BV[0, \omega]$ oder (falls $n \geqslant 2$) $m \leqslant n-2$, $g^{(i)} \in AC[0, \omega]$ mit $g^{(i)}(\omega) = 0$ für alle $0 \leqslant i \leqslant n-m-2$ und existiert $g^{(n-m-1)} \in BV[0, \omega]$, so gilt*

$$\sum_{\nu=1}^{n_\ell} \gamma_\nu e^{s_\nu x} - \frac{1}{\pi} \int_0^\omega g(t) \frac{\sin[r_\ell(x-t)]}{x-t} \, dt \to 0 \qquad (\ell \to \infty)$$

gleichmäßig für alle $x \in [\xi, \omega]$ mit beliebigem $0 < \xi < \omega$ und

$$\sum_{\nu=1}^{n_\ell} \gamma_\nu e^{s_\nu x} - s_\ell(g; x) \to 0 \qquad (\ell \to \infty) \tag{4.6}$$

beschränkt und kompakt in (ξ, ω) mit $0 < \xi < \omega$.

(2b) *Gilt für $m < n$ sogar $g^{(i)} \in AC[0, \omega]$ mit den Randbedingungen $g^{(i)}(\omega) = 0$ für $0 \leqslant i \leqslant n-m-1$ und ist $g^{(n-m)} \in BV[0, \omega]$, so gilt (4.6) beschränkt und kompakt auf ganz $(0, \omega)$.*

Beweis. Aussage (1) ist in [1] gezeigt; die dortige Schlußweise ist jedoch nicht auf den Fall $m < n$ übertragbar. Daher gehen wir beim Nachweis von Aussage (2a) in Verallgemeinerung von [8] wie folgt vor:

Wir zerlegen die meromorphe Funktion M aus (3.7) in

$$M(z) = \frac{e^{\omega z} Q_n(z)}{e^{\omega z} Q_n(z) + P_m(z)} = 1 + \frac{-P_m(z)}{f(z)}, \qquad z \in \mathbf{C}. \tag{4.7}$$

Mit den Wegen $C_\ell = C_\ell^+ \cup C_\ell^-$, $\ell \in \mathbf{N}$, in Abschnitt 3 haben wir aufgrund der Darstellung (3.14) die Integrale

$$J^+ := \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\ell^+} M(z) \int_0^\omega g(t)\, e^{z(x-t)}\, dt\, dz,$$

$$J^- := \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\ell^-} M(z) \int_0^\omega g(t)\, e^{z(x-t)}\, dt\, dz,$$

für $\ell \to \infty$ abzuschätzen. Aus (4.7) folgt

$$J^+ = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\ell^+} \int_0^\omega g(t)\, e^{z(x-t)}\, dt\, dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\ell^+} \frac{P_m(z)}{f(z)} \int_0^\omega g(t)\, e^{z(x-t)}\, dt\, dz$$

$$=: A - \frac{1}{2\pi i} B,$$

wobei nach Konstruktion von C_ℓ^+

$$A = \frac{1}{\pi} \int_0^\omega g(t) \frac{\sin[r_\ell(x-t)]}{x-t}\, dt,$$

mit r_ℓ in (3.10) gilt. Daraus ergibt sich unter Zuhilfenahme der Integraldarstellung für $s_\ell(g; x)$ mit dem Dirichlet-Kern

$$A - s_\ell(g; x) = o(1) \qquad (\ell \to \infty) \tag{4.8}$$

kompakt und beschränkt für alle $x \in (0, \omega)$. Für B gewinnt man mit $q = n - m$ unter Berücksichtigung von (3.13) und $g \in BV[0,\omega]$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} B &= \int_{C_\ell^+} \frac{P_m(z) e^{zx}}{Q_n(z) e^{\omega z} + P_m(z)} \int_0^\omega g(t) e^{-zt}\, dt\, dz \\ &= \mathcal{O}\left(\int_{C_\ell^+} \left| \frac{P_m(z) e^{zx}}{Q_n(z) e^{\omega z} + P_m(z)} \frac{dz}{z} \right| \right) = \mathcal{O}\left(\int_{C_\ell^+} \frac{|z^{-1} e^{zx}\, dz|}{|e^{\omega z} z^q| + \kappa} \right) \\ &= \mathcal{O}\left(\int_{C_\ell^+} |e^{-z(\omega - x)} z^{-(q+1)}\, dz| \right) = \mathcal{O}(r_\ell^{-q}) = o(1) \qquad (\ell \to \infty) \end{aligned} \tag{4.9}$$

gleichmäßig für alle $x \leqslant \omega$.

Die Modifikationen der Halbkreise K_ℓ^- zu C_ℓ^- in Abschnitt 3 beeinträchtigen die folgenden Abschätzungen auf C_ℓ^- nicht und bleiben daher unberücksichtigt. Wir schreiben mit $q = n - m$

$$J^- = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\ell^-} \frac{e^{zx} Q_n(z)}{e^{\omega z} Q_n(z) + P_m(z)} \cdot \frac{z^q}{z^q} \int_0^\omega g(t) e^{z(\omega - t)} \, dt \, dz,$$

wobei aufgrund der vorausgesetzten Regularität von g

$$z^q \int_0^\omega g(t) e^{(\omega - t)z} \, dt = \int_0^\omega e^{(\omega - t)z} \, dg^{(q-1)}(t) + \pi_0(z) e^{\omega z} - \pi_\omega(z) \tag{4.10}$$

mit Polynomen

$$\pi_x(z) := \sum_{i=0}^{q-1} g^{(q-1-i)}(x) z^i, \qquad z \in \mathbf{C},$$

für $x = 0$ und $x = \omega$ gilt, deren Grade wegen der über g vorausgesetzten Randbedingungen

$$\partial \pi_0 \leqslant q - 1, \qquad \partial \pi_\omega = 0,$$

sind. Daher spaltet J^- auf in

$$J^- = \frac{1}{2\pi i} (J_1^- + J_2^- - J_3^-)$$

mit

$$J_1^- := \int_{C_\ell^-} \frac{e^{zx} Q_n(z)}{z^q f(z)} \int_0^\omega e^{(\omega - t)z} \, dg^{(q-1)}(t) \, dz, \tag{4.11}$$

$$J_2^- := \int_{C_\ell^-} \frac{e^{(\omega + x)z} Q_n(z) \, \pi_0(z)}{z^q f(z)} \, dz, \tag{4.12}$$

$$J_3^- := \int_{C_\ell^-} \frac{e^{zx} Q_n(z) \, \pi_\omega(z)}{z^q f(z)} \, dz. \tag{4.13}$$

Unter Berücksichtigung von (3.13) folgt

$$\begin{aligned} J_1^- &= \mathcal{O}\left(\int_{C_\ell^-} \frac{|e^{zx} \, dz|}{|z^q e^{\omega z}| + \kappa} \right) = \mathcal{O}\left(\int_{C_\ell^+} \min\left\{ 1, \frac{|e^{\omega z}|}{|z^q|} \right\} |e^{-zx} \, dz| \right) \\ &= \mathcal{O}\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r_\ell^{-q+1} e^{(\omega - x) r_\ell \cos\phi} \min\{ e^{-\omega r_\ell \cos\phi} r_\ell^q, 1 \} \, d\phi \right) \\ &= \mathcal{O}\left(\int_0^{\pi/2} r_\ell^{-q+1} e^{(\omega - x) r_\ell \sin\phi} \min\{ r_\ell^q e^{-\omega r_\ell \sin\phi}, 1 \} \, d\phi \right). \end{aligned}$$

Wir wählen nun $\delta \in (0, \pi/2)$ derart, daß

$$e^{\omega r_\ell \sin\delta} = r_\ell^q \tag{4.14}$$

ist. Dann gilt $J_1^- = \mathcal{O}(I_\delta + I'_\delta)$ für $\ell \to \infty$ mit

$$I_\delta := \int_0^\delta r_\ell^{-q+1} e^{(\omega - x) r_\ell \sin\phi}\, d\phi,$$

$$I'_\delta := \int_\delta^{\pi/2} r_\ell e^{-x r_\ell \sin\phi}\, d\phi.$$

Daraus folgt mit Hilfe von (4.14)

$$I_\delta = \mathcal{O}(\delta r_\ell \cdot r_\ell^{-q} e^{(\omega - x) r_\ell \sin\delta}) = \mathcal{O}(\log r_\ell \cdot r_\ell^{-(q/\omega)x}) = o(1) \qquad (\ell \to \infty) \tag{4.15}$$

gleichmäßig für $0 < \xi \leqslant x \leqslant \omega$; ferner gilt mit $\sin\phi \geqslant \phi/2$, $\phi \in (0, \pi/2)$, und $u = r_\ell \phi$, daß

$$I'_\delta = \mathcal{O}\left(\int_{\delta r_\ell}^{(\pi/2) r_\ell} e^{-(x/2)u}\, du\right) = o(1) \qquad (\ell \to \infty) \tag{4.16}$$

gleichmäßig für alle $x \geqslant \xi > 0$, womit wir insgesamt

$$J_1^- = o(1) \qquad (\ell \to \infty) \tag{4.17}$$

gleichmäßig für $0 < \xi \leqslant x \leqslant \omega$ gezeigt haben.

Für die Abschätzung von J_2^- in (4.12) erhalten wir wegen (3.13)

$$\begin{aligned} J_2^- &= \mathcal{O}\left(\int_{C_\ell^-} \frac{|z^{q-1} e^{(\omega + x)z}\, dz|}{|z^q e^{\omega z}| + \kappa}\right) \\ &= \mathcal{O}\left(\int_{C_\ell^+} \min\left\{\frac{|e^{\omega z}|}{|z^q|}, 1\right\} |z^{q-1} e^{-(\omega + x)z}\, dz|\right) \\ &= \mathcal{O}\left(\int_0^{\pi/2} e^{-x r_\ell \sin\phi} \min\{1, r_\ell^q e^{-\omega r_\ell \sin\phi}\}\, d\phi\right). \end{aligned} \tag{4.18}$$

Spaltet man das Integral in (4.18) mit Hilfe von δ in (4.14) auf wie bei der Abschätzung von J_1^-, so folgt analog

$$J_2^- = \mathcal{O}\left(\frac{\log r_\ell}{r_\ell}\right) + \mathcal{O}\left(r_\ell^{-1} \int_{\delta r_\ell}^{(\pi/2) r_\ell} e^{-(x/2)u}\, du\right) = o(1) \qquad (\ell \to \infty) \tag{4.19}$$

gleichmäßig für alle $x \geqslant \xi > 0$ und beschränkt für $x > 0$. Für J_3^- in (4.13) erhalten wir wegen (3.13) die Abschätzung

$$J_3^- = \mathcal{O}\left(\int_{C_\ell^-} \frac{|e^{zx}\, dz|}{|z^q e^{\omega z}| + \kappa}\right)$$

$$= \mathcal{O}\left(\int_0^{\pi/2} r_\ell^{-q+1} e^{(\omega - x) r_\ell \sin\phi} \min\{1, r_\ell^q e^{-\omega r_\ell \sin\phi}\}\, d\phi\right). \qquad (4.20)$$

Die Zerlegung des Integrals in (4.20) unter Berücksichtigung von δ in (4.14) ergibt dann wie bei den obigen Abschätzungen (4.15–4.17) und (4.19)

$$J_3^- = \mathcal{O}(\log r_\ell \cdot r_\ell^{-(q/\omega)x}) + \mathcal{O}\left(\int_{\delta r_\ell}^{(\pi/2) r_\ell} e^{-(x/2)u}\, du\right) = o(1) \qquad (\ell \to \infty) \qquad (4.21)$$

gleichmäßig für $0 < \xi \leqslant x \leqslant \omega$.

Insgesamt haben wir mit (4.8–4.9) und (4.17), (4.19), (4.21) die Aussage (2a) von Lemma 1 bewiesen.

Die Aussage (2b) zeigt man analog unter der Berücksichtigung, daß auf Grund der Voraussetzungen über g in der (4.10) entsprechenden Beziehung $q + 1$ anstelle von q auftritt (s. [6]).

KOROLLAR 1. (1) *Ist $m = n$ und $g \in AC[0, \omega]$ mit $K_{n-1}(g) = 0$, so konvergiert*

$$\sum_{\nu=1}^{n_\ell} \gamma_\nu e^{s_\nu x} \to g(x) \qquad (\ell \to \infty) \qquad (4.22)$$

gleichmäßig für alle $x \in [0, \omega]$.

(2) *Ist $m < n$, $g \in AC[0, \omega]$ mit $g(0) = g(\omega) = 0$ und genügt g für $m \leqslant n - 2$ $(n \geqslant 2)$ den zusätzlichen Voraussetzungen von Lemma* 1(2a), *so gilt* (4.22) *gleichmäßig auf* $[\xi, \omega]$, $0 < \xi < \omega$.

Beweis. (1) Mit (3.5) und (4.5) folgt aus $K_{n-1}(g) = 0$, daß $e^{-\rho\omega} g(\omega) = g(0)$. Wegen der Absolutstetigkeit von $g e^{-\rho \cdot}$ konvergiert daher die Fourier-Reihe $s_\ell(g e^{-\rho \cdot}; x)$ gleichmäßig auf $[0, \omega]$, so daß mit Lemma 1 (1) die Aussage (1) des Korollars folgt.

(2) Mit Hilfe von partieller Integration ergibt sich für $x \in [0, \omega]$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\omega g(t) \frac{\sin[r_\ell(x - t)]}{x - t}\, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\omega g(t) \frac{d}{dt} [h(r_\ell(t - x))]\, dt$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_0^\omega g'(t)\, h(r_\ell(t - x))\, dt,$$

wobei $h(u) := \int_0^u (\sin v/v)\, dv$, $u \in \mathbf{R}$, gesetzt ist.

Daraus folgt wegen der beschränkten Konvergenz

$$h(r_\ell(t-x)) \to \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(t-x) \qquad (\ell \to \infty)$$

und $g' \in L(0, \omega)$ nach dem Satz von Egorow, daß

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\omega g(t) \frac{\sin[r_\ell(x-t)]}{x-t}\, dt \to -\frac{1}{2} \int_0^\omega g'(t) \operatorname{sgn}(t-x)\, dt = g(x) \qquad (\ell \to \infty)$$

gleichmäßig in $[0, \omega]$, so daß zusammen mit Lemma 1(2a) die Behauptung (2) des Korollars folgt.

LEMMA 2. *Mit den Wegen C_ℓ, $\ell \in \mathbf{N}$, in Abschnitt 3 sei*

$$I_\ell(r; x) := \int_{C_\ell} \frac{z^r e^{zx}}{f(z)}\, dz, \qquad r \in \mathbf{Z},\ x \in [0, \omega]. \tag{4.23}$$

(1) *Falls $m = n$ ist, gilt für $r \leqslant n-1$*

$$I_\ell(r; x) = o(1) \qquad (\ell \to \infty) \tag{4.24}$$

beschränkt und kompakt für alle $x \in (0, \omega)$; für $r \leqslant n-2$ ist die Konvergenz in (4.24) *gleichmäßig auf dem gesamten Intervall* $[0, \omega]$.

(2) *Ist $m < n$, so erhält man* (4.24) *beschränkt und kompakt auf* (ξ, ω), $0 < \xi < \omega$, *sofern $r \leqslant m$ ist.*

Ist $r = m$, so ist die Konvergenz in (4.24) *beschränkt in* $(0, \omega)$, *falls $m = n-1$, und gleichmäßig für alle $x \in [\xi, \omega]$, falls $m \leqslant n-2$. Für $r = m-1$ gilt* (4.24) *gleichmäßig in* $[\xi, \omega]$, $0 < \xi < \omega$, *und sogar beschränkt in* $(0, \omega]$, *für $r \leqslant m-2$ schließlich gleichmäßig auf* $[0, \omega]$.

Beweis. Mit (3.13) und $q = n - m$ ergibt sich auf C_ℓ^+ die Abschätzung

$$\begin{aligned} I_\ell^+(r; x) &:= \int_{C_\ell^+} \frac{z^r e^{zx}}{f(z)}\, dz = \int_{C_\ell^+} \frac{z^r e^{zx}}{Q_n(z) e^{\omega z} + P_m(z)}\, dz \\ &= \mathcal{O}\left(\int_{C_\ell^+} \frac{|z^{r-m} e^{zx}\, dz|}{|e^{\omega z} z^q| + \kappa} \right) = \mathcal{O}\left(\int_{C_\ell^+} |z^{r-n} e^{-z(\omega - x)}\, dz| \right) \\ &= \begin{cases} \mathcal{O}(\ell^{r-n}) = o(1), & r \leqslant n-1 \\ \mathcal{O}(\ell^{r-(n-1)}) = o(1), & r \leqslant n-2 \end{cases} \quad (\ell \to \infty), \end{aligned} \tag{4.25}$$

beschränkt für alle $x < \omega$ und gleichmäßig für $x \leqslant \eta < \omega$ im ersten Fall bzw. gleichmäßig für $x \leqslant \omega$ im zweiten Fall.

Für die Abschätzung auf C_ℓ^- erhalten wir wieder unter Vernachlässigung der Modifikationen der Halbkreise K_ℓ^- zu C_ℓ^-, die ohnehin nur einen Fehler $o(1)$ bewirken, folgendes:

$$\begin{aligned} I_\ell^-(r;x) &:= \int_{C_\ell^-} \frac{z^r e^{zx}}{f(z)}\,dz = \int_{C_\ell^-} \frac{z^r e^{zx}}{Q_n(z)e^{\omega z} + P_m(z)}\,dz \qquad (4.26)\\ &= \mathcal{O}\left(\int_{C_\ell^-} \frac{|z^{r-m} e^{zx}\,dz|}{|e^{\omega z} z^q| + \kappa}\right) = \mathcal{O}\left(\int_{C_\ell^+} \min\{1, |e^{\omega z} z^{-q}|\}\cdot |z^{r-m} e^{-zx}\,dz|\right). \end{aligned}$$

Für den Fall $q = n - m = 0$ gilt dann weiter

$$\begin{aligned} I_\ell^-(r;x) &= \mathcal{O}\left(\int_{C_\ell^+} |z^{r-n} e^{-zx}\,dz|\right)\\ &= \begin{cases} \mathcal{O}(\ell^{r-n}) = o(1), & r \leqslant n-1\\ \mathcal{O}(\ell^{r-(n-1)}) = o(1), & r \leqslant n-2 \end{cases} \qquad (\ell \to \infty), \end{aligned}$$

beschränkt für $x > 0$ und gleichmäßig für $x \geqslant \xi > 0$ bzw. gleichmäßig für $x \geqslant 0$. Damit haben wir die Aussage (1) bewiesen.

Im Fall $q = n - m > 0$ setzen wir die Abschätzung von $I_\ell^-(r;x)$ in (4.26), wie folgt, fort:

$$I_\ell^-(r;x) = \mathcal{O}\left(\int_0^{\pi/2} r_\ell^{r-n+1} e^{r_\ell \sin\phi(\omega - x)} \min\{r_\ell^q e^{-\omega r_\ell \sin\phi}, 1\}\,d\phi\right). \qquad (4.27)$$

Die Aufspaltung des Integrals in (4.27) mit δ in (4.14) ergibt dann ähnlich wie im Beweis von Lemma 1 die Abschätzung

$$\begin{aligned} I_\ell^-(r;x) &= \mathcal{O}(\log r_\ell r_\ell^{r-m-(q/\omega)x}) + \mathcal{O}\left(r_\ell^{r-m} \int_{\delta r_\ell}^{(\pi/2)r_\ell} e^{-(x/2)u}\,du\right) \qquad (\ell \to \infty)\\ &= o(1) \qquad (4.28) \end{aligned}$$

gleichmäßig für alle $x \geqslant \xi > 0$, falls $r \leqslant m$ gilt. (4.28) gilt auch beschränkt für $x > 0$, sofern $r \leqslant m - 1$ ist, und sogar gleichmäßig für $x \geqslant 0$, falls $r \leqslant m - 2$ erfüllt ist. Daraus folgt zusammen mit (4.25) die Aussage (2) in Lemma 2.

Nun sind wir in der Lage, den folgenden Konvergenzsatz über das Verhalten der KE-Entwicklung (3.2) im *Innern* des Entwicklungsintervalles $[0, \omega]$ zu formulieren:

SATZ 1. (1) *Es sei* $m = n$ *und* $g \in G$. *Dann gilt für die KE-Partialsummen* (3.14) *mit* ρ *in* (4.5)

$$T_{n_\ell}(g;x) - e^{\rho x} s_\ell(g e^{-\rho\cdot}; x) \to 0 \qquad (\ell \to \infty)$$

beschränkt und kompakt für alle $x \in (0, \omega)$.

(2a) *Ist* $m < n$ *und erfüllt* $g \in G$ *die Voraussetzungen in Lemma* 1(2a), *so konvergiert*

$$T_{n_\ell}(g; x) - s_\ell(g; x) \to 0 \qquad (\ell \to \infty) \tag{4.29}$$

beschränkt und kompakt in (ξ, ω) *mit* $0 < \xi < \omega$.

(2b) *Für* $m < n$ *und unter den Voraussetzungen von Lemma* 1(2b) *über* $g \in G$ *gilt* (4.29) *beschränkt und kompakt für alle* $x \in (0, \omega)$.

Beweis. Die Aussagen des Satzes folgen sofort aus den Lemmata 1 und 2, wenn man im Fall $m < n$ berücksichtigt, daß die in ω an g gestellten Randbedingungen eine Reduktion im Grad ∂K des Polynomes K aus (3.4–3.5), das in r_ν aus (4.3) vorkommt, bewirken. Es gilt nämlich $\partial K \leqslant m$ im Fall (2a) und $\partial K \leqslant m-1$ im Fall (2b).

Satz 1 und Lemma 1 verdeutlichen die enge Beziehung zwischen den KE-, CE- und Fourier-Entwicklungen, die sich im Innern des Entwicklungsintervalles $[0, \omega]$ alle gleich verhalten. Darüber hinaus lassen sich bekannte Ergebnisse aus der Fourier-Theorie (z.B. Riemann'sches Lokalisierungsprinzip, Konvergenztests) auf die KE- und CE-Entwicklung übertragen (vgl. [6]). Insbesondere weist die KE-Entwicklung für die Fälle $m = n$ und $m = n-1$, bei denen die Funktion g in Satz 1 nicht stetig zu sein braucht, genau wie die Fourier- und die CE-Entwicklung in Unstetigkeitsstellen $\tilde{x} \in (0, \omega)$ 1. Art von g das Gibbs'sche Phänomen auf, wobei auch sie gegen den Mittelwert $(g(\tilde{x}+0) + g(\tilde{x}-0))/2$ konvergiert. Aber im Unterschied zur CE-Reihe gelingt es bei der KE-Entwicklung nicht, wenigstens am rechten Intervallende $x = \omega$ die Äquikonvergenz mit einer Fourier-Reihe nachzuweisen, was wir im nächsten Abschnitt erklären werden.

Abschließend wollen wir noch bemerken, daß Satz 1 die in der Theorie der Differenzen-Differentialgleichungen gegebenen klassischen Konvergenzergebnisse über die KE-Entwicklung von Bellman und Cooke [2] für $m = n$ und $g \in C^n[0, \omega]$, von Wright [10] für $m = n$ und $g \in W^{n,1}(0, \omega)$ und von Verblunsky [7] für beliebiges $m \leqslant n$ und $g^{(i)} \in (C \cap BV)[0, \omega]$, $0 \leqslant i \leqslant n$, deutlich verallgemeinert. Die entwickelte Funktion g darf hier weniger Regularität aufweisen, und die kompakte Äquikonvergenz mit einer Fourier-Reihe gestattet zusätzlich Schlüsse über Art und Güte der Approximation von g durch seine KE-Entwicklung.

5. Konvergenz am Rand

In diesem Abschnitt beschränken wir uns im Hinblick auf die Allgemeinheit der Klasse von Funktionen mit konvergenter KE-Entwicklung auf ganze Funktionen f in (1.2) mit

$$m = n \qquad \text{oder} \qquad m = n - 1,$$

da dann in Satz 1 weder die Stetigkeit von g auf $[0, \omega]$ noch gewisse Nullrandbedingungen in $x = \omega$ benötigt werden. Dies stellt jedoch keine wesentliche Einschränkung dar, da die folgenden Überlegungen auch für $m \leqslant n - 1$ (falls $n \geqslant 2$) richtig bleiben, sofern die in Satz 1(2a) genannten Regularitätsbedingungen an g erfüllt sind.

Die Funktionenklasse

$$F \equiv F(m; s; 0, \omega) \subset G$$

(s. (3.1)) bestehe aus *stückweise* $(m + 1)$-fach differenzierbaren Funktionen g von beschränkter Variation auf $[0, \omega]$: Das heißt, zu $g \in BV[0, \omega]$ gibt es eine Zerlegung

$$\mathscr{Z} \equiv \mathscr{Z}(g) := \{x_0, x_1, ..., x_s\}$$

des Intervalles $[0, \omega]$ mit

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_s = \omega,$$

so daß

$$g \in C^{m+1}[x_\sigma, x_{\sigma+1}], \qquad 0 \leqslant \sigma \leqslant s - 1, \tag{5.1}$$

gilt. Dabei verstehen wir (5.1) derart, daß die rechts- bzw. linksseitigen Grenzwerte in x_σ, $1 \leqslant \sigma \leqslant s - 1$, der linksseitige Grenzwert in $x_s = \omega$ und der rechtsseitige Grenzwert in $x_0 = 0$ von $g^{(i)}$, $0 \leqslant i \leqslant m + 1$, existieren. Ferner definieren wir mit beliebigem $0 < \varepsilon < \min\{x_1, \omega - x_{s-1}\}$ rechtsseitige bzw. linksseitige Randumgebungen des Entwicklungsintervalles $[0, \omega]$ durch

$$U_0 := [0, x_1 - \varepsilon] \qquad \text{und} \qquad U_\omega := [x_{s-1} + \varepsilon, \omega]. \tag{5.2}$$

Dort gelten die im folgenden benötigten Abschätzungen:

LEMMA 3. *C_ℓ, $\ell \in \mathbf{N}$, seien die Wege aus Abschnitt 3, und d_σ, $1 \leqslant \sigma \leqslant s - 1$, seien beliebige Konstanten.*

(1) *Für beliebiges $m \leqslant n$ gilt*

$$J_\ell := \int_{C_\ell} \frac{P_m(z)}{z \cdot f(z)} \sum_{\sigma=1}^{s-1} d_\sigma e^{(x - x_\sigma)z}\, dz = o(1) \qquad (\ell \to \infty)$$

gleichmäßig für alle $x \in U_\omega$.

(2) *Für $m = n$ ist*

$$\mathcal{J}_\ell := \int_{C_\ell} \frac{Q_n(z)}{z \cdot f(z)} \sum_{\sigma=1}^{s-1} d_\sigma e^{(\omega + x - x_\sigma)z} \, dz = o(1) \qquad (\ell \to \infty)$$

gleichmäßig für alle $x \in U_0$.

Beweis. (1) Für $x \in U_\omega$ wird $\varepsilon \leqslant x - x_\sigma \leqslant \omega - x_1$, $1 \leqslant \sigma \leqslant s-1$. Dann gilt mit $q = n - m$

$$\begin{aligned} J_\ell^+ &:= \int_{C_\ell^+} \frac{P_m(z)}{z \cdot f(z)} \sum_{\sigma=1}^{s-1} d_\sigma e^{(x - x_\sigma)z} \, dz \\ &= \mathcal{O}\left(\int_{C_\ell^+} |z^{-(q+1)} e^{-x_1 z} \, dz| \right) = \mathcal{O}(\ell^{-(q+1)}) = o(1) \qquad (\ell \to \infty) \end{aligned}$$

gleichmäßig für $x \in U_\omega$. Außerdem folgt

$$\begin{aligned} J_\ell^- &:= \int_{C_\ell^-} \frac{P_m(z)}{z \cdot f(z)} \sum_{\sigma=1}^{s-1} d_\sigma e^{(x - x_\sigma)z} \, dz \\ &= \mathcal{O}\left(\int_{C_\ell^+} \min\{|e^{\omega z} z^{-q}|; 1\} \, |z^{-1} e^{-\epsilon z} \, dz| \right) \end{aligned}$$

gleichmäßig in U_ω. Für $m = n$ ergibt sich daraus

$$J_\ell^- = \mathcal{O}\left(\int_{C_\ell^+} |z^{-1} e^{-\epsilon z} \, dz| \right) = \mathcal{O}(\ell^{-1}) = o(1) \qquad (\ell \to \infty).$$

Für $m < n$ erhält man aus

$$J_\ell^- = \mathcal{O}\left(\int_0^{\pi/2} \min\{r_\ell^q e^{-\omega r_\ell \sin\varphi}; 1\} e^{(\omega - \epsilon) r_\ell \sin\varphi} r_\ell^{-q} \, d\varphi \right)$$

durch die Aufspaltung des Integrals mit δ in (4.14) wie bei früheren Beweisen (s. Abschnitt 4) ebenfalls

$$J_\ell^- = o(1) \qquad (\ell \to \infty),$$

so daß Aussage (1) von Lemma 3 folgt.

(2) Für $x \in U_0$ wird $\omega - x_{s-1} \leqslant \omega + x - x_\sigma \leqslant \omega - \varepsilon$, $1 \leqslant \sigma \leqslant s-1$. Dann gilt für $m = n$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\ell^+ &:= \int_{C_\ell^+} \frac{Q_n(z)}{z \cdot f(z)} \sum_{\sigma=1}^{s-1} d_\sigma e^{(\omega + x - x_\sigma)z} \, dz \\ &= \mathcal{O}\left(\int_{C_\ell^+} \left| e^{-\epsilon z} \frac{dz}{z} \right| \right) = \mathcal{O}(\ell^{-1}) = o(1) \qquad (\ell \to \infty), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{J}_\ell^- &:= \int_{C_\ell^-} \frac{Q_n(z)}{z \cdot f(z)} \sum_{\sigma=1}^{s-1} d_\sigma e^{(\omega+x-x_\sigma)z}\,dz \\ &= \mathcal{O}\left(\int_{C_\ell^+} \left| e^{-(\omega-x_{s-1})z}\frac{dz}{z}\right|\right) = \mathcal{O}(\ell^{-1}) = o(1) \qquad (\ell\to\infty)\end{aligned}$$

jeweils gleichmäßig in U_0. Damit ist alles gezeigt.

Nun können wir unser Hauptergebnis über das Randverhalten der KE-Entwicklung formulieren:

SATZ 2. *Es sei* $0 \leqslant n - m \leqslant 1$ *und* $g \in F$. *Dann ergibt sich für die KE-Entwicklung von g, daß*

$$T_{n_\ell}(g; x) \to g(x) \qquad (\ell \to \infty) \tag{5.3}$$

gleichmäßig für alle $x \in U_\omega$. *Im Fall* $m = n$ *gilt* (5.3) *auch gleichmäßig für alle* $x \in U_0$.

Beweis. Wegen $g \in F$ gilt insbesondere mit (5.1) die Zerlegung

$$g = g_1 + g_2 \tag{5.4}$$

mit der *Sprungfunktion*

$$g_1(x) := \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant x_1, \\ \sum_{\mu=1}^{\sigma} d_\mu, & x_\sigma < x \leqslant x_{\sigma+1},\ 1 \leqslant \sigma \leqslant s-1, \end{cases} \tag{5.5}$$

von g, wobei

$$d_\sigma = g(x_\sigma + 0) - g(x_\sigma - 0), \qquad 1 \leqslant \sigma \leqslant s-1,$$

bedeutet, und einer Funktion $g_2 \in AC[0, \omega]$. Für die Ableitung von g_2 gilt $g_2' \in BV[0, \omega]$, falls $m = n$ ist, während für $m = n - 1$ wenigstens $g_2' \in L^2(0, \omega)$ ist. Wir haben somit die Aussage von Satz 3 für die KE-Entwicklungen $T_{n_\ell}(g_1; x)$ und $T_{n_\ell}(g_2; x)$ von g_1 und g_2 zu zeigen:

Für die KE-Entwicklungskoeffizienten der Sprungfunktion g_1 in (5.5) ergibt sich gemäß (4.1–4.3)

$$c_\nu(g_1) = \gamma_\nu(g_1) + r_\nu(g_1), \qquad \nu \in \mathbf{Z},$$

mit

$$\begin{aligned}\gamma_\nu(g_1) &= \frac{\lambda_\nu}{s_\nu} \sum_{\sigma=1}^{s-1} d_\sigma e^{-s_\nu x_\sigma} - \frac{Q_n(s_\nu)}{s_\nu f'(s_\nu)} g_1(\omega), \\ r_\nu(g_1) &= \frac{Q_n(s_\nu) - a_0}{s_\nu f'(s_\nu)} g_1(\omega), \qquad \text{falls } s_\nu \neq 0,\ \nu \in \mathbf{Z},\end{aligned}$$

und

$$\gamma_0(g_1) = \lambda_0 \left\{ \omega g_1(\omega) - \sum_{\sigma=1}^{s-1} d_\sigma x_\sigma \right\},$$

$$r_0(g_1) = \frac{a_1\, g_1(\omega)}{f'(0)},$$

für eine eventuell vorhandene Nullstelle $s_0 = 0$ von f in (1.2). Im folgenden setzen wir der Einfachheit halber $f(0) \neq 0$ voraus; andernfalls läßt sich der Beweisgang analog durchführen unter Berücksichtigung anderer Residuen, die sich gegeneinander aufheben. Dann gilt

$$T_{n_\ell}(g_1; x) = \sum_{\nu=1}^{n_\ell} \xi_\nu(g_1) e^{s_\nu x} - \sum_{\nu=1}^{n_\ell} \eta_\nu(g_1) e^{s_\nu x} \tag{5.6}$$

mit

$$\begin{aligned} \xi_\nu(g_1) &= \frac{\lambda_\nu}{s_\nu} \sum_{\sigma=1}^{s-1} d_\sigma e^{-s_\nu x_\sigma}, \\ \eta_\nu(g_1) &= \frac{a_0\, g_1(\omega)}{s_\nu f'(s_\nu)}, \qquad s_\nu \neq 0,\ \nu \in \mathbf{Z}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Aus dem Residuensatz und Lemma 2 folgt mit der Bezeichnung in (4.23)

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{n_\ell} \eta_\nu(g_1) e^{s_\nu x} &= \frac{a_0\, g_1(\omega)}{2\pi i} I_\ell(-1; x) - \frac{a_0\, g_1(\omega)}{f(0)} \\ &= -\frac{a_0}{a_0 + b_0} g_1(\omega) + o(1) \qquad (\ell \to \infty) \end{aligned} \tag{5.8}$$

gleichmäßig für alle $x \in [0, \omega]$, falls $m = n$, bzw. gleichmäßig für alle $x \in [\xi, \omega]$, $0 < \xi < \omega$, falls $m = n - 1$. Ferner erhält man unter Berücksichtigung der Cauchy'schen Integralformel, des Residuensatzes und Lemma 3(1)

$$\begin{aligned} &\sum_{\nu=1}^{n_\ell} \xi_\nu(g_1) e^{s_\nu x} - g_1(\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\ell} \frac{Q_n(z) e^{\omega z} - f(z)}{z \cdot f(z)} \sum_{\sigma=1}^{s-1} d_\sigma e^{(x - x_\sigma) z}\, dz - \frac{a_0\, g_1(\omega)}{f(0)} \\ &= -\frac{a_0\, g_1(\omega)}{f(0)} - \frac{1}{2\pi i} J_\ell \\ &= -\frac{a_0}{a_0 + b_0} g_1(\omega) + o(1) \qquad (\ell \to \infty) \end{aligned} \tag{5.9}$$

gleichmäßig für alle $x \in U_\omega$. Für $m = n$ gilt wegen Lemma 3(2) zusätzlich

$$\sum_{\nu=1}^{n_\ell} \xi_\nu(g_1) e^{s_\nu x} = -\frac{a_0 g_1(\omega)}{f(0)} + \frac{1}{2\pi i} \tilde{J}_\ell$$

$$= -\frac{a_0}{a_0 + b_0} g_1(\omega) + o(1) \qquad (\ell \to \infty) \tag{5.10}$$

gleichmäßig in U_0. Aus (5.5–5.10) folgt insgesamt

$$T_{n_\ell}(g_1; x) \to g_1(x) \qquad (\ell \to \infty) \tag{5.11}$$

gleichmäßig für alle $x \in U_\omega$ und für $m = n$ auch gleichmäßig für alle $x \in U_0$.

Da $g_2' \equiv g' \in G$ (s. (3.1)) fast überall in $[0, \omega]$ gilt, existiert insbesondere $r_\nu(g_2')$, $\nu \in \mathbf{Z}$, so daß wir mit dem Operator L in (1.3) die folgende Darstellung der KE-Entwicklungskoeffizienten von g_2 erhalten:

$$c_\nu(g_2) = \gamma_\nu(g_2) + r_\nu(g_2),$$

$$r_\nu(g_2) = \frac{r_\nu(g_2')}{s_\nu} + \frac{Q_n(s_\nu) g_2(\omega) + P_m(s_\nu) g_2(0)}{s_\nu f'(s_\nu)} - \frac{(Lg_2)(\omega)}{s_\nu f'(s_\nu)},$$

$$s_\nu \neq 0, \; \nu \in \mathbf{Z}. \tag{5.12}$$

Die Anwendung des Residuensatzes ergibt mit (3.5) und (4.23) für $\ell \in \mathbf{N}$

$$\sum_{\nu=1}^{n_\ell} \frac{r_\nu(g_2')}{s_\nu} e^{s_\nu x} = -\frac{K_0(g_2')}{f(0)} + \frac{K_0(g_2')}{2\pi i} I_\ell(-1; x)$$

$$+ \sum_{j=0}^{n-3} \frac{K_{j+1}(g_2')}{2\pi i} I_\ell(j; x) + \frac{K_{n-1}(g_2')}{2\pi i} I_\ell(n-2; x),$$

wobei der letzte Term nur für $n \geqslant 2$ $(m \geqslant 1)$ und der vorletzte nur für $n \geqslant 3$ $(m \geqslant 2)$ auftritt. Aus Lemma 2 folgt dann

$$\sum_{\nu=1}^{n_\ell} \frac{r_\nu(g_2')}{s_\nu} e^{s_\nu x} = -\left\{ \sum_{j=1}^{n} a_j g_2^{(j)}(\omega) + \sum_{j=1}^{m} b_j g_2^{(j)}(0) \right\} \Big/ (a_0 + b_0) + o(1)$$

$$(\ell \to \infty) \tag{5.13}$$

gleichmäßig für alle $x \in [0, \omega]$, falls $m = n$, und gleichmäßig für $x \in [\xi, \omega]$, $0 < \xi < \omega$, falls $m = n - 1$. Analog folgt für $\ell \in \mathbf{N}$

$$\sum_{\nu=1}^{n_\ell} \frac{Q_n(s_\nu) g_2(\omega) + P_m(s_\nu) g_2(0)}{s_\nu f'(s_\nu)} = -\frac{a_0 g_2(\omega) + b_0 g_2(0)}{a_0 + b_0}$$

$$+ \frac{g_2(\omega)}{2\pi i} \sum_{j=0}^{n} a_j I_\ell(j-1; x) + \frac{g_2(0)}{2\pi i} \sum_{j=0}^{m} b_j I_\ell(j-1; x)$$

$$= -\frac{a_0 g_2(\omega) + b_0 g_2(0)}{a_0 + b_0}$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \left\{ a_0 g_2(\omega) I_\ell(-1; x) + g_2(\omega) \sum_{j=0}^{n-2} a_{j+1} I_\ell(j; x) \right.$$

$$+ a_n g_2(\omega) I_\ell(n-1; x) + b_0 g_2(0) I_\ell(-1; x)$$

$$\left. + g_2(0) \sum_{j=0}^{m-2} b_{j+1} I_\ell(j; x) + b_m g_2(0) I_\ell(m-1; x) \right\},$$

wobei der zweite Term in der geschweiften Klammer nur für $n \geqslant 2$, der vorletzte nur für $m \geqslant 2$ und der letzte nur für $m \geqslant 1$ auftritt. Wegen Lemma 2 gilt daher

$$\sum_{\nu=1}^{n_\ell} \frac{Q_n(s_\nu) g_2(\omega) + P_m(s_\nu) g_2(0)}{s_\nu f'(s_\nu)} - \frac{K_{n-1}(g_2)}{2\pi i} I_\ell(n-1; x)$$

$$= -\frac{a_0 g_2(\omega) + b_0 g_2(0)}{a_0 + b_0} + o(1) \qquad (\ell \to \infty) \tag{5.14}$$

gleichmäßig für $x \in [0, \omega]$ bzw. $x \in [\xi, \omega]$, $0 < \xi < \omega$, falls $m = n$ bzw. $m = n - 1$ ist. Ebenso ergibt sich

$$\sum_{\nu=1}^{n_\ell} \frac{(Lg_2)(\omega)}{s_\nu f'(s_\nu)} e^{s_\nu x} = \frac{(Lg_2)(\omega)}{2\pi i} I_\ell(-1; x) - \frac{(Lg_2)(\omega)}{f(0)}$$

$$= -\left\{ \sum_{j=0}^{n} a_j g_2^{(j)}(\omega) + \sum_{j=0}^{m} b_j g_2^{(j)}(0) \right\} \Big/ (a_0 + b_0) + o(1) \qquad (\ell \to \infty) \tag{5.15}$$

gleichmäßig in $[0, \omega]$ bzw. $[\xi, \omega]$, $0 < \xi < \omega$, für $m = n$ bzw. $m = n - 1$. Insgesamt folgt aus (5.12–5.15), daß

$$\sum_{\nu=1}^{n_\ell} r_\nu(g_2) e^{s_\nu x} - \frac{K_{n-1}(g_2)}{2\pi i} I_\ell(n-1; x) = o(1) \qquad (\ell \to \infty) \tag{5.16}$$

gleichmäßig für alle $x \in [0, \omega]$ im Fall $m = n$ und gleichmäßig für alle $x \in [\xi, \omega]$, $0 < \xi < \omega$, im Fall $m = n - 1$ wird.

Nun bleibt noch die CE-Entwicklung von g_2 auf gleichmäßige Konvergenz zu untersuchen: Dazu führen wir die Funktionen

$$\varphi(x) := g_2(x) - \frac{K_{n-1}(g_2)}{a_n \omega} x, \qquad x \in [0, \omega], \tag{5.17}$$

$$\psi(x) := g_2(x) - \frac{g_2(\omega) - g_2(0)}{\omega} x - g_2(0), \qquad x \in [0, \omega], \tag{5.18}$$

ein, die wie g_2 absolut stetig auf $[0, \omega]$ sind und für die

$$K_{n-1}(\varphi)=0,$$
$$\psi(0)=\psi(\omega)=0,$$

gilt, so daß nach Korollar 1 aus Abschnitt 4

$$\sum_{\nu=1}^{n_\ell} \gamma_\nu(\varphi)e^{s_\nu x}=\varphi(x)+o(1) \qquad (\ell\to\infty) \tag{5.19}$$

gleichmäßig in $[0, \omega]$ für $m=n$ und

$$\sum_{\nu=1}^{n_\ell} \gamma_\nu(\psi)e^{s_\nu x}=\psi(x)+o(1) \qquad (\ell\to\infty) \tag{5.20}$$

gleichmäßig für $x\in[\xi, \omega]$, $0<\xi<\omega$, im Fall $m=n-1$ gilt.

Berechnet man nach (4.2) die CE-Entwicklungskoeffizienten einer linearen Funktion, so folgt aus (5.17) und (5.19) nach Anwendung des Residuensatzes und Lemma 2 im Fall $m=n$

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=1}^{n_\ell} \gamma_\nu(g_2)\,e^{s_\nu x} &= \sum_{\nu=1}^{n_\ell} \gamma_\nu(\varphi)e^{s_\nu x}-\frac{K_{n-1}(g_2)}{a_n\omega}\left\{\omega \sum_{\nu=1}^{n_\ell}\frac{Q_n(s_\nu)}{s_\nu f'(s_\nu)}e^{s_\nu x}\right.\\ &\quad\left.+\sum_{\nu=1}^{n_\ell}\frac{Q_n(s_\nu)+P_m(s_\nu)}{s_\nu^2 f'(s_\nu)}e^{s_\nu x}\right\}\\ &=\varphi(x)+\frac{K_{n-1}(g_2)}{a_n\omega}x-\frac{K_{n-1}(g_2)}{2\pi i}I_\ell(n-1;x)+o(1)\\ &=g_2(x)-\frac{K_{n-1}(g_2)}{2\pi i}I_\ell(n-1;x)+o(1) \qquad (\ell\to\infty)\end{aligned} \tag{5.21}$$

gleichmäßig für alle $x\in[0, \omega]$. Analog ergibt sich mit (5.18) und (5.20) im Fall $m=n-1$

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=1}^{n_\ell} \gamma_\nu(g_2)e^{s_\nu x} &= \sum_{\nu=1}^{n_\ell} \gamma_\nu(\psi)e^{s_\nu x}+\frac{g_2(\omega)-g_2(0)}{\omega}\left\{-\omega \sum_{\nu=1}^{n_\ell}\frac{Q_n(s_\nu)}{s_\nu f'(s_\nu)}e^{s_\nu x}\right.\\ &\quad\left.-\sum_{\nu=1}^{n_\ell}\frac{Q_n(s_\nu)+P_m(s_\nu)}{s_\nu^2 f'(s_\nu)}e^{s_\nu x}\right\}-g_2(0)\sum_{\nu=1}^{n_\ell}\frac{Q_n(s_\nu)+P_m(s_\nu)}{s_\nu f'(s_\nu)}e^{s_\nu x}\\ &=\psi(x)+\frac{g_2(\omega)-g_2(0)}{\omega}x+g_2(0)-\frac{a_n g_2(\omega)}{2\pi i}I_\ell(n-1;x)+o(1)\\ &=g_2(x)-\frac{K_{n-1}(g_2)}{2\pi i}I_\ell(n-1;x)+o(1) \qquad (\ell\to\infty)\end{aligned} \tag{5.22}$$

gleichmäßig für alle $x \in [\xi, \omega]$, $0 < \xi < \omega$. Insgesamt folgt aus (5.16) und (5.21–5.22) für die KE-Entwicklung von g_2, daß

$$T_{n_\ell}(g_2; x) \to g_2(x) \qquad (\ell \to \infty) \tag{5.23}$$

gleichmäßig in $[0, \omega]$ bzw. $[\xi, \omega]$, $0 < \xi < \omega$, für $m = n$ bzw. $m = n - 1$. Aus (5.4), (5.11) und (5.23) ergibt sich schließlich die Aussage von Satz 3.

Die Vermeidung des Gibbs-Phänomens am Rand des Entwicklungsintervalles bei der KE-Entwicklung wird also durch die *Addition günstiger Korrekturterme*—siehe (3.4), (3.5) und (4.3)—zum CE-Anteil erreicht, die die Randwerte der entwickelten Funktion g in der zum Operator L in (1.3) passenden Weise enthält.

Eine Übertragung der Schlußweise dieses Abschnittes auf den Fourier-Spezialfall mit $m = n = 0$ und f aus (1.1) führt zur Bedingung $g(0) = g(\omega)$, aus der die Periodizität von g folgt.

ANERKENNUNG

Der Autor ist dem Gutachter für die wertvollen Ratschläge und hilfreichen Bemerkungen zu dieser Arbeit sehr dankbar.

LITERATUR

1. J. A. ANDERSON AND G. H. FULLERTON, On a class of Cauchy exponential series, *Pacific J. Math.* **15** (1965), 405–417.
2. R. BELLMAN AND K. L. COOKE, "Differential-Difference Equations," Academic Press, New York, 1963.

2a. M. BÔCHER, On Gibbs's phenomenon, *J. Reine Angew. Math.* **144** (1914), 41–47.

3. L. FEJES, Des séries exponentielles de Cauchy, *C. R. Acad. Sci.* **200** (1935), 1712–1714.
4. J. W. GIBBS, Fourier's series, *Nature* **59** (1899), 200, 606.
5. J. N. LYNESS, Computational techniques based on the Lanczos representation, *Math. Comp.* **28** (1974), 81–123.
6. C. SCHRÖCK-PAULI, "Exponentialentwicklungen nach dem Nullstellensystem gewisser ganzer Funktionen," Report Jül-1560, Kernforschungsanlage Jülich, Dezember, 1978.
7. S. VERBLUNSKY, On a class of difference-differential equations, *Proc. London Math. Soc. (3)* **6** (1956), 355–365.
8. S. VERBLUNSKY, On a class of Cauchy exponential series, *Rend. Circ. Mat. Palermo (II)* **10** (1961), 5–26.
9. H. WILBRAHAM, On a certain periodic function, *Camb. Dubl. Math. J.* **3** (1848), 198.
10. E. M. WRIGHT, The linear difference-differential equations with constant coefficients, *Proc. Royal Soc. Edinburgh A* **62** (1949), 387–393.